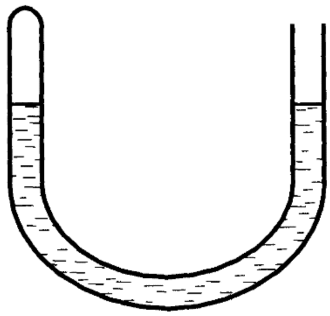
Время выполнения заданий — 240 минут.

Пишите разборчиво. В работе не должно быть никаких пометок, не относящихся к ответам на вопросы. Если Вы не знаете ответа, ставьте прочерк.

Максимальное количество баллов — 100.

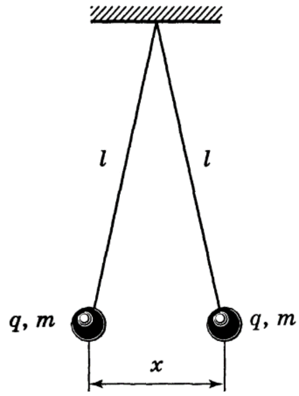
Задача 1 (20 баллов). В U-образную трубку с открытыми концами налили ртуть, после чего один из концов трубки запаяли (рис. 1). Затем ртуть вывели из состояния равновесия, в результате чего возникли малые колебания ртути в трубке. Найдите период этих колебаний, если известно, что масса ртути m = 367 г, ее плотность ρ = 13,6 10^3 кг/м^3, площадь поперечного сечения трубки S = 1 см^2, а высота столба воздуха в запаянном конце трубки равна l = 1м^2. Внешнее атмосферное давление p_0 = 10^5 Па. Процесс считать изотермическим.



Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{(2\rho g + p_0 / l)S}} \approx 0,63\ c$

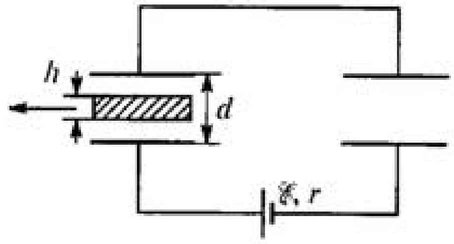
Задача 2 (20 баллов). Горизонтально расположенный закрытый с обеих сторон цилиндр разделен поршнем на 2 равные части. Поршень может свободно (без трения) перемещаться. В первоначальном состоянии в обеих частях цилиндра находилось по одному молю одноатомного идеального газа при одинаковой температуре T_0. Разделяющий поршень может проводить тепло, причем тепловой поток через него линейно зависит от разности температур его стенок: $q_{12} = \alpha\,(T_1 - T_2)$. Одну часть цилиндра начинают нагревать, при этом газ получает тепло со скоростью q1, а через время τ с такой же скоростью начинают отбирать тепло от газа из другой части цилиндра. Определите коэффициент теплопроводности α, если известно, что в стационарном состоянии (при $t >> \tau$) отношение объемов разных частей цилиндра равно $n = 2$.

Ответ: $\alpha = \frac{9qR}{2(q\tau + 3RT_0)}$



Задача 3 (20 баллов). Два одинаковых маленьких шарика массой m и зарядом q каждый висят на нитях одинаковой длины l на расстоянии $x \ll l$. Из-за медленной утечки заряда по нити величина заряда каждого шарика изменяется со временем t по закону $q = q_0\,(1 - at)^{3/2}$ (где a – постоянная), а шарики сближаются. Величины $q_0,\ m,\ a,\ l$ заданы. Найдите скорость $v = \Delta x/\Delta t$ сближения шариков.

Ответ: $v = a\left(\dfrac{2klq_0^2}{mg}\right)^{1/3}$



Задача 4 (20 баллов). Два одинаковых плоских конденсатора с расстоянием между обкладками d подключены к батарее с постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r. В левом конденсаторе расположена диэлектрическая пластина толщиной h ($h < d$) с диэлектрической проницаемостью ϵ. После установления стационарного состояния пластину быстро выдвигают из конденсатора так, что заряды на обкладках этого конденсатора не успевают измениться. Определить величину и направление тока через батарею сразу после удаления пластины.

Ответ: $I = \dfrac{\mathcal{E}h(\epsilon - 1)}{r(2\epsilon d - h(\epsilon - 1))}$

Задача 5 (20 баллов). Земля из-за вращения вокруг своей оси сплющена со стороны полюсов. Поэтому расстояние от центра Земли до полюсов (полярный радиус) меньше расстояния от центра Земли до экватора (Экваториальный радиус). Оцените отношение разности экваториального и полярного радиусов к среднему радиусу Земли *R* = 6370 км. Землю считать жидким телом, окруженным тонкой эластичной оболочкой в виде земной коры.

Ответ: $\dfrac{\Delta R}{R} = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \dfrac{R}{2g} \approx \dfrac{1}{582}$

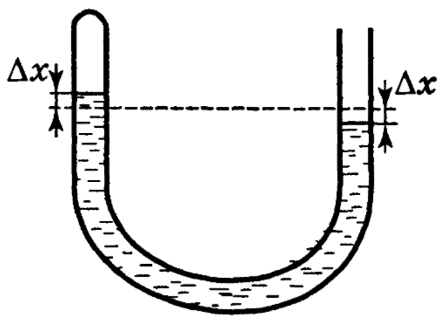
10 класс. Решения.

Каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задач, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

Задача 1. Механика-термодинамика.

Условие. В U-образную трубку с открытыми концами налили ртуть, после чего один из концов трубки запаяли (рис. 1). Затем ртуть вывели из состояния равновесия, в результате чего возникли малые колебания ртути в трубке. Найдите период этих колебаний, если известно, что масса ртути m = 367 г, ее плотность ρ = 13,6 103 кг/м3, площадь поперечного сечения трубки S = 1 см2, а высота столба воздуха в запаянном конце трубки равна l = 1м2. Внешнее атмосферное давление p0 = 105 Па. Процесс считать изотермическим.

Источник: задача предлагалась на Всероссийской олимпиаде (*Всероссийские олимпиады по физике 1992-2001*, 2002, Задача 10.44).



Решение. При смещении уровня ртути в каждом колене (см. Рис.1.) на расстояние Δx из-за разности гидростатических давлений возникает сила, равная

$$F = 2\rho g S \Delta x.$$

Воздух в левом колене сжимается, объем воздуха при этом становится равным $(l - \Delta x)S$. По закону Бойля-Мариотта $p_0 l = (p_0 + \Delta p)(l - \Delta x) = p_0 l - p_0 \Delta x + \Delta p l - \Delta p \Delta x$. Так как колебания малые, слагаемым $\Delta p \Delta x$ можно пренебречь. Отсюда

$$\Delta p = \frac{\Delta x}{l} p_0,$$

а сила, действующая со стороны воздуха $F_2 = \left(\Delta x / l\right) p_0 S$. Уравнение движения ртути имеет вид:

$$ma + S\left(2\rho g + \frac{p_0}{l}\right)\Delta x = 0.$$

Уравнение совпадает с уравнением движения груза на пружинке с эффективной «жесткостью».

$$k = \left(2\rho g + \frac{p_0}{l}\right)S.$$

Тогда по аналогии

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\left(2\rho g + \frac{p_0}{l}\right)S}} \approx 0,63c.$$

Задача 2. Термодинамика.

Условие. Горизонтально расположенный закрытый с обеих сторон цилиндр разделен поршнем на 2 равные части. Поршень может свободно (без трения) перемещаться. В первоначальном состоянии в обеих частях цилиндра находилось по одному молю одноатомного идеального газа при одинаковой температуре T_0. Разделяющий поршень может проводить тепло, причем тепловой поток через него линейно зависит от разности температур его стенок: $q_{12} = \alpha\,(T_1 - T_2)$. Одну часть цилиндра начинают нагревать, при этом газ получает тепло со скоростью q1, а через время τ с такой же скоростью начинают отбирать тепло от газа из другой части цилиндра. Определите коэффициент теплопроводности α, если известно, что в стационарном состоянии (при $t >> \tau$) отношение объемов разных частей цилиндра равно $n = 2$.

Источник: задача предлагалась на Всероссийской олимпиаде (*Всероссийские олимпиады по физике 1992-2001*, 2002, Задача 10.38).

Решение. Применим первое начало термодинамики ко всей системе:

$$q\tau = \Delta U = C_V(T_1 - T_0) + C_V(T_2 - T_0) = \frac{3}{2}RT(T_2 + T_1 - 2T_0).$$

(В уравнении учтено, что для одноатомного газа молярная теплоемкость при постоянном объеме равна $C_V = (3/2)R$). Запишем условие стационарности системы:

$$p_1 = p_2 = p_{кон}, \; q = q_{12} = \alpha(T_1 - T_2).$$

В обоих уравнениях T_1 и T_2- установившиеся температуры газа в нагреваемой и охлаждающей частях цилиндра соответственно. Решая совместно уравнения на температуры находим T_1 и T_2:

$$T_1 = \frac{1}{3}\frac{q\tau}{R} + T_0 + \frac{q}{2\alpha}, \qquad T_2 = \frac{1}{3}\frac{q\tau}{R} + T_0 - \frac{q}{2\alpha}.$$

Используя уравнения состояния для обеих частей цилиндра в стационарном состоянии $p_k(V_0 + \Delta V) = RT_1$, $p_k(V_0 - \Delta V) = RT_2$, получаем

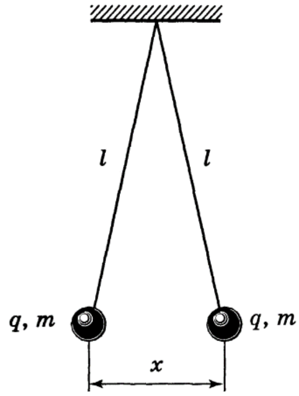
$$n = \frac{V_0 + \Delta V}{V_0 - \Delta V} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Подставляя значения для T_1 и T_2 находим коэффициент теплопроводности при $n=2$:

$$\alpha = \frac{9qR}{2(q\tau + 3RT_0)}.$$

Задача 3. Электростатика.

Условие. Два одинаковых маленьких шарика массой m и зарядом q каждый висят на нитях одинаковой длины l на расстоянии $x \ll l$. Из-за медленной утечки заряда по нити величина заряда каждого шарика изменяется со временем t по закону $q = q_0\,(1-at)^{3/2}$ (где a – постоянная), а шарики сближаются. Величины q_0, m, a, l заданы. Найдите скорость $v = \Delta x/\Delta t$ сближения шариков.



Источник: задача предлагалась на Всероссийской олимпиаде (*Всероссийские олимпиады по физике 1992-2001*, 2002, Задача 10.58).

Решение. Так как ток утечки мал, то можно считать, что в каждый момент времени сумма всех сил, действующих на шарик, равна нулю. Тогда сила Кулона

$$F_k = k\frac{q^2}{x^2} = mg\,tg\,\alpha,$$

где угол α - половинный угол между нитями. Отсюда получим

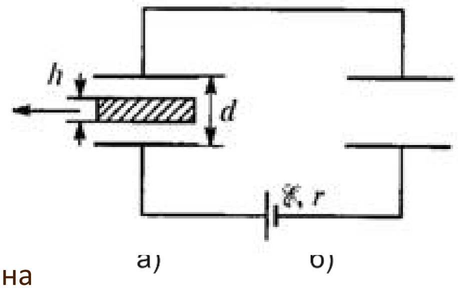
$$kq^2(1-\alpha t)^3 = \frac{mgx^3}{2l} \qquad \text{или} \qquad x = \left(\frac{2klq_0^2x^3}{mg}\right)^{1/3}(1-\alpha t)$$

откуда скорость сближения шариков равна

$$v = \alpha\left(\frac{2klq_0^2x^3}{mg}\right)^{1/3}.$$

Задача 4. Электростатика.

Условие. Два одинаковых плоских конденсатора с расстоянием между обкладками d подключены к батарее с постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r. В левом конденсаторе расположена диэлектрическая пластина толщиной h ($h < d$) с диэлектрической проницаемостью ϵ. После установления стационарного состояния пластину быстро выдвигают из конденсатора так, что заряды на обкладках этого конденсатора не успевают измениться. Определить величину и направление тока через батарею сразу после удаления пластины.



Источник: задача предлагалась на письменном экзамене в МФТИ (*Билеты письменных вступительных экзаменов МФТИ (2003 г.)*, 2003, Билет 10, Задача 4).

Решение. До изъятия диэлектрической пластины систему можно рассматривать как последовательное соединение трёх плоских конденсаторов. У всех этих конденсаторов одинаковая площадь пластин. У правого конденсатора расстояние между пластинами равно d, а между пластинами пустота. Обозначим его ёмкость C_0. У второго конденсатора расстояние между пластинами равно $(d-h)$, и между пластинами также пустота. Его ёмкость равна $C_0/(1-\alpha)$, где мы для краткости обозначили отношение $\alpha = h/d$. У третьего конденсатора расстояние между пластинами равно h, а пространство между пластинами заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ. Его ёмкость равна поэтому $C_0\epsilon/\alpha$.

Полная ёмкость цепи последовательно соединённых конденсаторов равна

$$C_{\text{in}} = \left(\frac{1}{C_0} + \frac{1-\alpha}{C_0} + \frac{\alpha}{\epsilon C_0}\right)^{-1} = \frac{C_0}{2-\alpha+\alpha/\epsilon}$$

Заряд, запасённый на обкладках этого составного конденсатора, равен $Q_{\text{in}} = \mathcal{E}C_{\text{in}}$. Сразу после изъятия пластины ёмкость составного конденсатора C_{fin} будет равна ёмкости двух последовательно подсоединённых конденсаторов ёмкостью C_0, то есть $C_{\text{fin}} = C_0/2$, а напряжение на нём соответственно $U = Q_{\text{in}}/C_{\text{fin}}$. Ток, который потечёт в этот момент, равен

$$I = \frac{U-\mathcal{E}}{r} = \frac{\mathcal{E}}{r}\left(\frac{C_{\text{in}}}{C_{\text{fin}}} - 1\right) = \frac{\mathcal{E}}{r}\frac{(\epsilon-1)}{(2d/h-1)\epsilon+1}$$

Задача 5. Задача-оценка.

Условие. Земля из-за вращения вокруг своей оси сплющена со стороны полюсов. Поэтому расстояние от центра Земли до полюсов (полярный радиус) меньше расстояния от центра Земли до экватора (Экваториальный радиус). Оцените отношение разности экваториального и полярного радиусов к среднему радиусу Земли R = 6370 км. Землю считать жидким телом, окруженным тонкой эластичной оболочкой в виде земной коры.

Источник: задача предлагалась на Всероссийской олимпиаде (*Всероссийские олимпиады по физике 1992-2001*, 2002, Задача 9.53).

Решение. Условием, определяющим форму поверхности Земли, является эквипотенциальность её поверхности. В нашем случае, когда принято во внимание вращение Земли, это условие должно выглядеть следующим образом: работа, необходимая для того, чтобы переместить пробное тело (материальную точку) с одного участка поверхности Земли на другой, должна быть равна нулю.

Посмотрим теперь, какую работу надо совершить для того, чтобы переместить тело с экватора на полюс. Мы находимся во вращающейся системе координат, поэтому на материальную точку массы m действуют две силы – сила тяжести и сила инерции (центробежная сила):

$$\vec{F} = m\vec{g} + m\omega^2\vec{\rho}$$

где ω – циклическая частота вращения Земли. Сила тяжести направлена всегда к центру Земли (вектор $\vec{g}$, имеющий вблизи поверхности Земли почти постоянное абсолютное значение), а центростремительная сила направлена от оси вращения Земли (вектор $\vec{\rho}$, по модулю равный расстоянию ρ до оси вращения).

Посмотрим, какую работу совершает центробежная сила при перемещении материальной точки с полюса на экватор. Эта сила по соей зависимости от расстояния похожа на возвращающую силу для упругой пружины (поскольку линейно зависит от расстояния ρ до оси вращения), однако направлен в противоположную сторону. Поэтому по аналогии с упругой пружиной, работа, совершённая центробежной силой при изменении ρ от нуля (полюс) до R (экватор), равна

$$A_c = \frac{1}{2}m\omega^2R^2$$

Эта работа должна компенсироваться работой силы тяжести, которая равна

$$A_g = -mg\,\Delta R$$

Приравнивая нулю сумму этих двух работ, получаем, что на экваторе радиус Земли больше её радиуса на полюсе на величину

$$\Delta R = \frac{\omega^2\,R}{2\,g}R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{R}{2\,g}R \approx 11\text{ м}$$

Литература

Билеты письменных вступительных экзаменов МФТИ (2003 г.). (2003). Москва: МФТИ.

Всероссийские олимпиады по физике 1992-2001. (2002). (С. М. С. Козел, В.П. Ed.). Москва: Вербум-М.